Dipartimento di Scienze Statistiche

Analisi Matematica

Lezione 10, 13 ottobre 2013

prof. Daniele Ritelli

daniele.ritelli@unibo.it

Confronto asintotico

Le successioni (a_n) e (b_n) sono equivalenti per $n \to +\infty$ se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

In tal caso scriveremo $a_n \sim b_n$

Confronto asintotico

Le successioni (a_n) e (b_n) sono equivalenti per $n \to +\infty$ se

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

In tal caso scriveremo $a_n \sim b_n$

(i) $\displaystyle \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$

(ii) $n^2 + n \sim n^2$

(iii) $\displaystyle \sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$

(iv) $\sqrt{1 + n^2} \sim n$

Le successioni (a_n) e (b_n) hanno lo stesso ordine di grandezza per $n \to +\infty$ se

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

In tal caso scriveremo $a_n \asymp b_n$

Le successioni (a_n) e (b_n) hanno lo stesso ordine di grandezza per $n \to +\infty$ se

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

In tal caso scriveremo $a_n \asymp b_n$ Ad esempio

- $1 - \cos \frac{1}{n} \asymp \frac{4}{n^2}$
- $\sin \frac{3}{n} \asymp \frac{1}{n}$
- $\sqrt{1 + 2n^2} \asymp n$
- $\frac{1 + 2n^2}{3n} \asymp 5n$

Le successioni (a_n) e (b_n) hanno lo stesso ordine di grandezza per $n \to +\infty$ se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

In tal caso scriveremo $a_n \asymp b_n$ Ad esempio

- $1 - \cos \frac{1}{n} \asymp \frac{4}{n^2}$
- $\sin \frac{3}{n} \asymp \frac{1}{n}$
- $\sqrt{1+2n^2} \asymp n$
- $\frac{1+2n^2}{3n} \asymp 5n$

Attenzione: se $a_n \sim b_n$ allora $a_n \asymp b_n$ ma non viceversa.

Simboli di Bachman–Landau

Diremo che la successione (a_n) è trascurabile rispetto alla successione (b_n) o che la successione (a_n) è o-piccolo di (b_n) per $n \to +\infty$, e scriveremo $a_n = \mathrm{o}(b_n)$, se

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

Simboli di Bachman–Landau

Diremo che la successione (a_n) è trascurabile rispetto alla successione (b_n) o che la successione (a_n) è o-piccolo di (b_n) per $n \to +\infty$, e scriveremo $a_n = \mathrm{o}(b_n)$, se

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

$a_n = \mathrm{o}(1)$ è equivalente a $\lim_{x \to +\infty} a_n = 0$ mentre $1 = \mathrm{o}(a_n)$ è equivalente a $\lim_{x \to +\infty} a_n = \infty$

Esempio

- $\dfrac{1}{n^2} = \mathrm{o}(\dfrac{1}{n})$
- $n = \mathrm{o}(n^2)$
- $1 - \cos\dfrac{1}{n} = \mathrm{o}(\dfrac{1}{n})$
- $\dfrac{1}{n} - \sin\dfrac{1}{n} = \mathrm{o}(\dfrac{1}{n^2})$

Proprietà

(a) $a_n = \mathrm{o}(b_n),\ b_n = \mathrm{o}(c_n) \implies a_n = \mathrm{o}(c_n)$

(b) $a_n = \mathrm{o}(b_n),\ c_n = \mathrm{o}(d_n) \implies a_n c_n = \mathrm{o}(b_n d_n)$

(c) $a_n \asymp b_n,\ c_n = \mathrm{o}(d_n) \implies a_n c_n = \mathrm{o}(b_n d_n)$

(d) $a_n \sim b_n \iff a_n - b_n = \mathrm{o}(b_n)$

Esempio

- $1 - e^{\frac{1}{n}} = o(1)$ e $\dfrac{1}{n^2} = o(\dfrac{1}{n})$ quindi $\dfrac{1}{n^2}(1 - e^{\frac{1}{n}}) = o(\dfrac{1}{n^2})$
- $\sin\dfrac{1}{n} \sim \dfrac{1}{n}$ quindi $\sin\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n} = o(\dfrac{1}{n})$ e dunque

$$\sin\frac{1}{n} = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}).$$

Attenzione prendere nota della correzione a pagina 76 quarta riga

Principio di eliminazione dei termini trascurabili

Se è $a_n = o(b_n)$ e $c_n = o(d_n)$ allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n + b_n}{c_n + d_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{d_n}$$

Attenzione prendere nota della correzione a pagina 76 Teorema 3.95

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{3}{n} + \dfrac{1}{n^3}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{n}}{\dfrac{3}{n}} = \frac{1}{3}$$

Principio di eliminazione dei termini trascurabili

Se è $a_n = o(b_n)$ e $c_n = o(d_n)$ allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n + b_n}{c_n + d_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{d_n}$$

Attenzione prendere nota della correzione a pagina 76 Teorema 3.95

Esempio

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n} + \frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{3}{n}} = \frac{1}{3}$$

Esempio

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+n+n^2}{1-n-n^3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{-n^3}=0$$

Principio di sostituzione con successioni equivalenti

Se è $a_n \sim b_n$ e $c_n \sim d_n$ allora

$$\lim_{n\to+\infty} a_n c_n = \lim_{n\to+\infty} b_n d_n$$

Inoltre se $\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} d_n \neq 0$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{c_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{d_n}$$

Confronto fra infinitesimi ed infiniti

Siano (a_n) e (b_n) due successioni infinitesime. Diremo che

(i) a_n è un infinitesimo di ordine superiore a b_n se $a_n = o(b_n)$ cioè se $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

(ii) a_n è un infinitesimo dello stesso ordine di b_n se

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \neq 0$$

(iii) a_n è un infinitesimo di ordine inferiore a b_n se $b_n = o(a_n)$ cioè se $\lim_{n \to +\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$

Sia (u_n) una successione infinitesima. Si dice che la successione (a_n) è un infinitesimo di ordine $\alpha > 0$ rispetto al campione u_n se $a_n \asymp u_n^\alpha$ cioè se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{u_n^\alpha} = \ell \neq 0,\ \ell \in \mathbb{R}.$$

Sia (u_n) una successione infinitesima. Si dice che la successione (a_n) è un infinitesimo di ordine $\alpha > 0$ rispetto al campione u_n se $a_n \asymp u_n^\alpha$ cioè se

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{u_n^\alpha} = \ell \neq 0, \ \ell \in \mathbb{R}.$$

la definizione è equivalente ad affermare che

$$a_n = \ell \, u_n^\alpha + \mathrm{o}(u_n^\alpha)$$

Sia (u_n) una successione infinitesima. Si dice che la successione (a_n) è un infinitesimo di ordine $\alpha > 0$ rispetto al campione u_n se $a_n \asymp u_n^\alpha$ cioè se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{u_n^\alpha} = \ell \neq 0,\ \ell \in \mathbb{R}.$$

la definizione è equivalente ad affermare che

$$a_n = \ell\, u_n^\alpha + \mathrm{o}(u_n^\alpha)$$

$b_n = \ell\, u_n^\alpha$ si dice parte principale dell'infinitesimo a_n.

Esercizio

Dopo aver determinato l'ordine di infinitesimo della successione

$$a_n = \sqrt{n^4+1} - \sqrt{n^4-1}$$

rispetto al campione $u_n = \dfrac{1}{n}$ si determini la parte principale dell'infinitesimo

Serie

Data la successione (a_n), la serie generata da (a_n) è la successione (s_n) di termine generale:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Serie

Data la successione (a_n), la serie generata da (a_n) è la successione (s_n) di termine generale:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Diremo che la serie generata da (a_n) è:

Serie

Data la successione (a_n), la serie generata da (a_n) è la successione (s_n) di termine generale:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Diremo che la serie generata da (a_n) è:

a) convergente, se è convergente (s_n)

Serie

Data la successione (a_n), la serie generata da (a_n) è la successione (s_n) di termine generale:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Diremo che la serie generata da (a_n) è:

a) convergente, se è convergente (s_n)

b) divergente, se è divergente (s_n)

Il numero reale

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

si dice somma della serie (quando questa converge)

Teorema

Supponiamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **sia convergente. Allora:**

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Teorema

Supponiamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **sia convergente. Allora:**

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Dimostrazione. Per ipotesi esiste il limite:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n$$

Teorema

Supponiamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **sia convergente. Allora:**

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Dimostrazione. Per ipotesi esiste il limite:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n$$

$$a_n =$$

Teorema

Supponiamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **sia convergente. Allora:**

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Dimostrazione. Per ipotesi esiste il limite:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n$$

$$a_n = s_n - s_{n-1} =$$

Teorema

Supponiamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **sia convergente. Allora:**

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Dimostrazione. Per ipotesi esiste il limite:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n$$

$$a_n = s_n - s_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

Teorema

Supponiamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sia convergente. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Dimostrazione. Per ipotesi esiste il limite:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n$$

$$a_n = s_n - s_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n =$$

Teorema

Supponiamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sia convergente. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Dimostrazione. Per ipotesi esiste il limite:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n$$

$$a_n = s_n - s_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) =$$

Teorema

Supponiamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sia convergente. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Dimostrazione. Per ipotesi esiste il limite:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n$$

$$a_n = s_n - s_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = s - s = 0$$

La tesi del teorema non può essere invertita, esistono successioni il cui termine generale a_n tende a zero, ma la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è divergente, ad esempio

La tesi del teorema non può essere invertita, esistono successioni il cui termine generale a_n tende a zero, ma la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è divergente, ad esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$